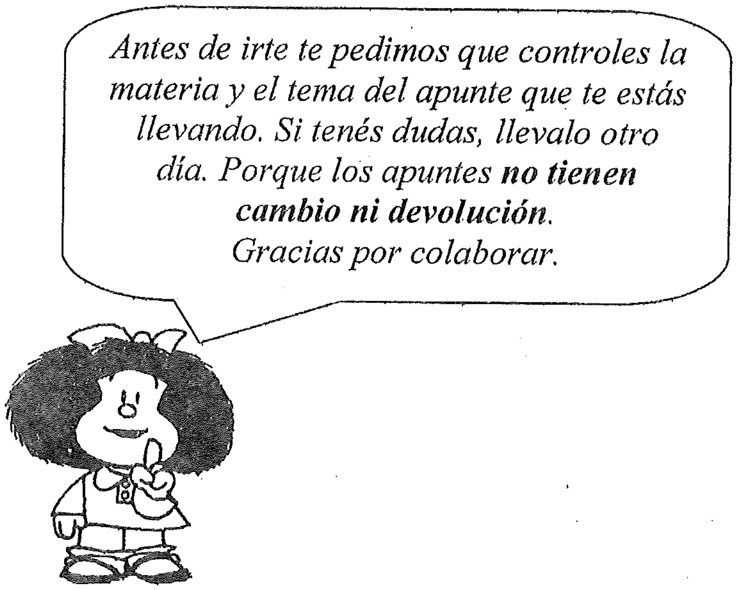
Ejercicios Resueltos 4

Física I

Hidrodinámica

- Ecuación de continuidad - Teorema de Bernoulli - Efecto Venturi - Tubo de Pitot-

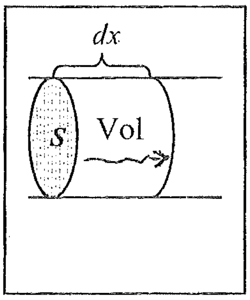


Índice

El caudal y la ecuación de continuidad

Se define el caudal de un fluido que circula por una cañería como el volumen de líquido que atraviesa una determinada sección de la cañería por unidad de tiempo:

$$Q = \frac{Vol}{tiempo}$$



Como el volumen que atraviesa una sección S se puede poner como $Vol = S.dx$ entonces el caudal se puede poner como:

$$Q = \frac{Vol}{tiempo} = S.\frac{dx}{dt} = v.S$$

Donde v es la velocidad del fluido en la cañería.

También es habitual que se hable de caudal "másico", que expresa la cantidad de masa que atraviesa la sección por una unidad de tiempo. Su relación con el anterior está dada por la conocida expresión de la densidad:

$$Q_{mas} = \frac{masa}{tiempo} = \delta\frac{Vol}{tiempo} = \delta.Q$$

Ecuación de continuidad: si un fluido es incompresible y no existen fuentes ni sumideros donde aparezca o desaparezca, entonces la cantidad de líquido que viaja por una tubería en régimen estacionario es constante.

$$Q = cte \xrightarrow{Q=v.S} v.S = cte$$

1) Se desea pasar por un conducto un volumen total de 100 l de agua, en un lapso de 15 s de forma continua y uniforme. ¿Cuál es el caudal? Medido en unidades MKS [m^3/s], en unidades [l/min], en unidades CGS [cm^3/s]

El caudal lo calculamos por su definición, como el cociente del volumen que circula sobre el tiempo:

$$Q = \frac{Vol}{tiempo} = \frac{100\,l}{15\ s} = 6{,}\widehat{6}\ \frac{l}{s}$$

Para ponerlo en las unidades pedidas vamos a cambiar en el numerador o el divisor por los equivalentes. Así, si uso que 1 litro = 1 dm^3 =1.10^{-3} m^3 me queda:

$$Q = 6{,}\widehat{6}\ \frac{10^{-3}\,m^3}{s} = 6{,}\widehat{6}.10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$$

Si uso en cambio que 1 seg = $\frac{1}{60}\text{min}$ me queda:

$$Q = 6{,}\widehat{6}\ \frac{l}{\frac{1}{60}\text{min}} = 400\ \frac{l}{\text{min}}$$

Y si uso que 1 litro = 1 dm^3 = 1000 cm^3 me queda:

$$Q = 6{,}\widehat{6}\ \frac{1000\,cm^3}{s} = 6{,}\widehat{6}.10^3\ \frac{cm^3}{s}$$

La Presión. Unidades y equivalencias

Cuando se aplica una fuerza sobre una determinada superficie se define la presión como el cociente entre la componente normal de la fuerza a la superficie y el área de la misma:

$$P = \frac{F_n}{Sup}$$

La unidad MKS es $\frac{Newton}{m^2}$, y se la llama "Pascal"

Otras unidades

i) La baria es la unidad CGS, por lo tanto es el cociente $\frac{dina}{cm^2}$. Equivale a 0,1 Pa

ii) El Bar, que por definición es 1 millón de barias. Equivale a 100 000 Pa

iii) Atm; es la presión normal al nivel del mar debido a la atmósfera de la Tierra. Equivale a 101300 Pa

iv) El milímetro de mercurio (*mmHg*). La presión atmosférica normal es de 760 *mmHg*, y por lo expresado arriba sale que 760 *mmHg* = 101300 Pa

v) El psi. Es una unidad habitual en la industria, se define como el peso de una libra sobre una superficie de una pulgada cuadrada. La Atm es 14,7 psi

Presión absoluta y presión relativa o manométrica

Cuando se mide una presión con un equipo, este suele comparar contra la presión en el exterior, que es la atmosférica. Así, cuando una enfermera nos toma la presión arterial, o en el taller se mide la presión de inflado de los neumáticos, la presión medida es la diferencia por encima de la atmosférica. Se llama presión relativa o manométrica a la que se mide con el instrumento, y absoluta a la que resulta de sumarle la presión atmosférica a la relativa:

$$P_{Abs} = P_{rel} + P_{atm}$$

2- Se tiene en una habitación que está a presión atmosférica normal, un recipiente en forma de cubo de un 1 *m* de lado, a presión, de tal manera que en cada cara la fuerza resultante es de 35000 [N] de adentro hacia afuera del recipiente.

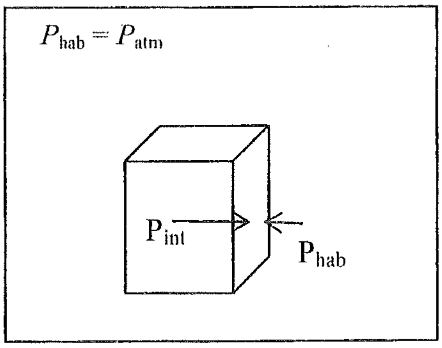
Indicar el valor de la presión absoluta y de la presión relativa en [bar] y en [Pa] y en mca (metros de columna de agua) y en [kgr/cm^2]

(Ayuda: 1[bar] = 106 [dy/cm^2] = 105 [Pa] = 0,981 [atm])

(1 [kgr/cm^2 = 98,1x10^3 [Pa])

La fuerza resultante está dirigida de adentro hacia fuera. Esto nos indica que la presión adentro es mayor que afuera. Por definición de presión:

$$P = \frac{Fuerza}{Sup} = \frac{35\,000\ N}{1\,m^2} = 35\ 000\,Pa$$



Pero es muy importante comprender qué presión fue la que encontré. Como se hizo con la fuerza resultante (es decir con la diferencia de fuerzas ΔF entre la aplicada a la cara interna menos la externa) la presión encontrada es también una diferencia ΔP, entre la presión recibida en la cara interna menos la recibida en la cara externa. Como la cara externa está sometida a la presión de la habitación (presión atmosférica normal: 101300 Pa), esta diferencia nos dice cuántos "pascales" por encima de la presión atmosférica normal se encuentra el aire del interior de la caja. Es decir, es el valor de la presión relativa o manométrica del interior de la caja.

Por otro lado, la absoluta resulta de sumarle la presión atmosférica. Por lo tanto, en MKS, la presión del aire del interior de la caja vale:

$$P_{Abs} = P_{rel} + P_{Atm} = 35\ 000\ Pa + 101\ 300\ Pa = 136\ 300\ Pa$$

Ahora transformamos a las otras unidades pedidas. Por un lado tenemos que transformar a [bar], para lo cual usamos la relación 1 bar = 10^5 Pa

$$100\ 000\ Pa \text{ ―――― } 1\ bar$$
$$35\ 000\ Pa \text{ ―――― } P_{rel} = \frac{35\ 000\ .1bar}{100000} = 0{,}35\ bar$$

$$100\ 000\ Pa \text{ ―――― } 1\ bar$$
$$136\ 300\ Pa \text{ ―――― } P_{Abs} = \frac{136\ 300\ .1}{100\,000} = 1{,}363\ bar$$

Por otro tenemos que transformar a [mca], para lo cual usamos que 1 mca = 9800 Pa

$$9800\ Pa \text{ ———— } 1\ mca$$

$$35\ 000\ Pa \text{ ———— } P_{rel} = \frac{35\ 000\ .1}{9800} = 3{,}57\ mca$$

$$9800\ Pa \text{ ———— } 1\ mca$$

$$136\ 300\ Pa \text{ ———— } P_{Abs} = \frac{136\ 300\ .1}{9800} = 13{,}9\ mca$$

Finalmente tenemos que pasar a kgr/cm^2 para lo cual uso que 1 kgr/cm^2 = $98{,}1\times10^3$ Pa

$$98100\ Pa \text{ ———— } 1\ kgr/cm^2$$

$$35\ 000\ Pa \text{ ———— } P_{rel} = \frac{35\ 000\ .1}{98100} = 0{,}357\ kgr/cm^2$$

$$98\ 100\ Pa \text{ ———— } 1\ kgr/cm^2$$

$$136\ 300\ Pa \text{ ———— } P_{Abs} = \frac{136\ 300\ .1}{98100} = 1{,}4\ kgr/cm^2$$

3) Un día en que se pronosticaba una tormenta se midió la presión atmosférica con el siguiente resultado: 100 300 [Pa]. Indicar la presión en mmHg (milímetros de columna de mercurio) y en psi (libras por pulgada cuadrada = *pound square inch)*
(Ayuda: 1 [atm] = 760 [mmHg] = 14,7 [psi])

Sólo tenemos que hacer una conversión de unidades, con ayuda de dos reglas de tres simples. Primero recordamos la equivalencia entre la presión atmosférica normal y los "Pascales": 1 atm =101 300 Pa

Así:

$$101300\ Pa \text{ ——— } 760 \text{ mmHg}$$

$$100300\ Pa \text{ ——— } P = \frac{760 \text{ mmHg}.100300\ Pa}{101300\ Pa} \approx 752{,}5 \text{ mmHg}$$

Y

$$101300\ Pa \ \text{———} \ 14{,}7 \text{ psi}$$

$$100300\ Pa \ \text{———} \ P = \frac{14{,}7\ psi.100300\ Pa}{101300\ Pa} \approx 14{,}55 \text{ psi}$$

4) El caudal medio de la sangre que circula en un tramo de poca longitud, de vaso sanguíneo sin ramificaciones es de un litro por minuto. (Se considera el fluido ideal).

a) ¿cuál es la velocidad media de la sangre en un tramo de dicho vaso si el radio interior es 0,5 cm?

b) ¿Cuál es la velocidad si el radio es 0,25 cm?

a) De la definición de caudal que vimos en la página 2:

$$Q = \iint_{Sup} \vec{v}.\vec{ds} = v_{media}.Sección \xrightarrow{reemplazo} 1\frac{litro}{\min} = v_m.(\pi.r^2)$$

Antes de hacer la cuenta vamos a poner unidades coherentes. Por ejemplo, en el caudal podemos poner el "litro" como 1000 cm^3, y el minuto como 60 seg. En ese caso:

$$1\frac{1000\ cm^3}{60\ seg} = v_m.\pi.\overbrace{(0{,}5\ cm)^2}^{0{,}25\,cm^2} \rightarrow v_m \approx 21{,}2\ \frac{cm}{seg}$$

La misma cuenta puedo hacerla sin pasar la unidad de tiempo: $v_m \approx 1273\ \frac{cm}{\min} = 12{,}73\ \frac{m}{\min}$

Como no se aclara la unidad pedida, cualquiera de ellas es una posible respuesta.

b) Cambiamos el valor del radio y repito la cuenta:

$$Q = v_{media}.Sección \xrightarrow{reemplazo} 1\frac{litro}{\min} = v_m.\pi.(0{,}25cm)^2$$

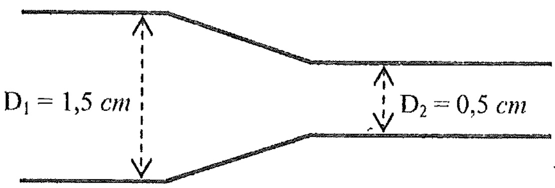
$$v_{media} = \frac{1000\frac{cm^3}{\min}}{\pi.(0{,}25cm)^2} \approx 5093\ \frac{cm}{\min} \approx 85\ \frac{cm}{seg}$$

5) Un líquido ideal de densidad 1 [*kg/l*] se mueve con una velocidad de 3 [*cm/s*] por un tubo horizontal de diámetro 1,5 [*cm*]. A partir de cierta sección se reduce el diámetro del tubo a 0,5 [*cm*].

a) Calcular la velocidad del líquido en la parte más angosta.

b) Calcular el caudal volumétrico y el caudal másico que se mueve por este tubo.

Informe los resultados en unidades MKS y en unidades CGS.



a) como el caudal que fluye por el tubo es el mismo en todo punto, la ecuación de continuidad nos dice que:

$$Q_i = Q_f \xrightarrow{Q=v.S} v_1.\cancel{\pi}.r_1^{\,2} = v_2.\cancel{\pi}.r_2^{\,2} \rightarrow 3\frac{cm}{seg}.(0{,}75\ cm)^2 = v_2.(0{,}25\ cm)^2$$

$$\xrightarrow{despejo} v_2 = \frac{3\frac{cm}{seg}.(0{,}75\ cm)^2}{(0{,}25\ cm)^2} = 27\ \frac{cm}{seg} \xrightarrow{27\ cm = 0{,}27\ m} 0{,}27\frac{m}{seg}$$

b) El caudal volumétrico en cualquier sección lo saco como el producto de la velocidad media por la sección:

$$Q = v_1.\pi.r_1^{\,2} = 3\frac{cm}{seg}.\pi.(0{,}75\ cm)^2 \approx 5{,}3\ \frac{cm^3}{seg}$$

Está en unidades CGS. Para pasarlo a MKS debo cambiar el cm^3 a m^3:

$$Q = 5{,}3\ \frac{1.10^{-6}\ m^3}{seg} = 5{,}3\ .10^{-6}\ \frac{m^3}{seg}$$

El caudal másico lo obtengo como se mostró en el cuadro de teoría de la página 2. Es decir, basta multiplicar por la densidad (usando unidades adecuadas):

$$\delta = 1\frac{kg}{l} = 1\frac{kg}{10^{-3}m^3} = 1000\frac{kg}{m^3} \text{ (MKS)} \quad \text{o} \quad \delta = 1\frac{kg}{l} = 1\frac{1000g}{1000cm^3} = 1\frac{g}{cm^3} \text{ (CGS)}$$

$$Q_{mas} = \delta.Q_{vol} = 1000\,\frac{kg}{m^3}\,.5{,}3.10^{-6}\,\frac{m^3}{s} = 5{,}3.10^{-3}\,\frac{kg}{s}$$

O, en CGS, basta cambiar el "kg" del numerador a "gramos":

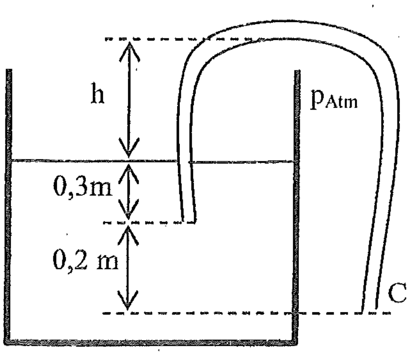
$$Q_{Másico} = 5{,}3.10^{-3}\,\frac{1000g}{seg} = 5{,}3\frac{g}{seg}$$

El Teorema de Bernoulli

Consideremos un fluido que circula por una tubería, y que cumple que no disipa energía (no viscoso), no cambia de volumen (incompresible). Se puede demostrar que para dos puntos que se encuentren sobre la misma línea de corriente de flujo se cumple que:

$$P + \frac{1}{2}.\delta.v^2 + \delta.g.h = cte$$

Donde v es la velocidad del fluido, y h es la altura respecto de alguna referencia.
Si además el flujo es irrotacional (rot(v) = O), la igualdad vale para cualquier par de puntos del fluido (ya no es necesario que estén sobre la misma línea de corriente)



6) Se llena una manguera de pequeño diámetro: 1 cm (constante) con nafta y se cierra por sus dos extremos. Se introduce un extremo en un depósito de nafta de gran diámetro, venteado a la atmósfera. Las posiciones de los extremos de la manguera y de la superficie libre en el depósito se indican en la figura. Se abren ambos extremos. La densidad relativa de la nafta es 0,68.

Hallar indicando la estrategia de cálculo:

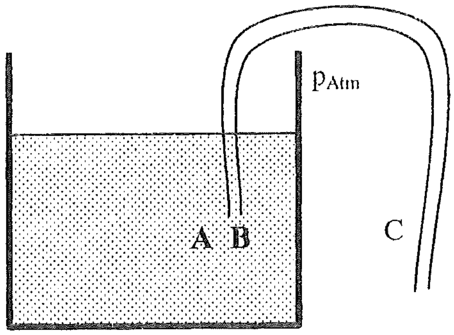
a) La velocidad inicial de la nafta en la manguera y su variación entre el punto más alto y el extremo C, en el caso que la hubiera.

b) El caudal volumétrico y másico inicial.

c) La altura "h" máxima teórica que puede tener la curva de la manguera.

(Este sistema de vaciar un tanque de nafta es conocido con el nombre de sifón)

(Presión atmosférica normal 1013 hPa)



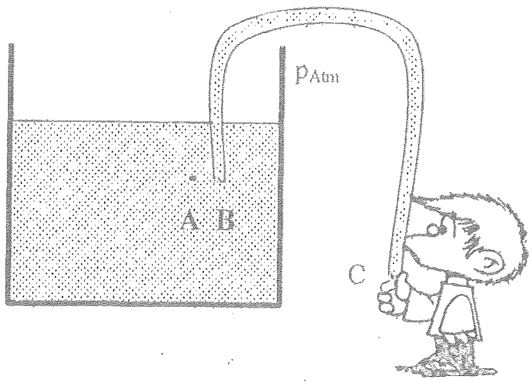
Vamos a ir explicando cada paso que debo dar para que se logre vaciar el tanque. En primer lugar coloco la manguera, y el líquido tiende a entrar dentro de ella, hasta que llega hasta un nivel igual al que existe en el recipiente, como muestro en el dibujo.

¿Por qué sube exactamente hasta ahí? La respuesta es que lo único que provoca que el fluido suba o baje es una diferencia de presión. Cuando el tubo está vacío, en realidad está lleno de aire a presión atmosférica. El líquido en la entrada del tubo (punto A) tiene la presión atmosférica más la originada por la columna de líquido de 30 cm por encima. Originalmente, en el punto B en la entrada del tubo, el aire tiene presión atmosférica. Por eso la presión en A es mayor que en B, y el fluido entra hasta la situación anterior (se igualan los niveles), y en la entrada del tubo tengo igualadas la presión externa en A y B.

Para que la manguera se llene con fluido, hay que hacer succión (vaciar de aire la manguera, chupando en el otro extremo), cosa que desaconsejo si trabajamos con nafta (te podés llevar un trago). También se puede sumergir por completo, esperar a que se evacue todo el aire, cerrar con un dedo el extremo que vamos a sacar, cuando está sumergida. Y ahí llevarlo hasta el punto C. Como sea que se lo haya hecho, en este punto inicia el problema: se abren los extremos y el fluido se "mueve" en la manguera viajando desde A hasta C.

¿Por qué lo hace en ese sentido? La respuesta es siempre la misma, se mueve de esa manera porque el fluido viaja hacia donde hay menor presión. Y ese lugar es el extremo C. El motivo es el siguiente: cuando todavía no abrimos ese extremo el fluido está en reposo, y el Teorema Fundamental de la Hidrostática nos dice que cuánto más abajo vamos en un fluido, mayor es su presión.

Así, la presión dentro del tubo en el extremo C es mayor que la que hay en A, que es la atmosférica más "algo" (la de la columna de 30 cm de fluido por encima). Cuando abrimos el extremo C el fluido encuentra el ambiente, a presión atmosférica, y empieza a salir.



Para empezar con las cuentas vamos a considerar un fluido ideal, no viscoso, irrotacional, que fluye a través de la manguera. Aplicamos la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}.\delta.v_1{}^2 + \delta.g.h_1 = P_2 + \frac{1}{2}.\delta.v_2{}^2 + \delta.g.h_2$$

Vamos a tomar en consideración dos puntos sencillos para determinar los parámetros de esta igualdad. El primero es el punto superior de la superficie del depósito. Como se encuentra abierto a la atmósfera, se supone que la presión es la atmosférica. Al irse vaciando el tanque esa superficie desciende muy lentamente, por lo que vamos a considerar despreciable la velocidad del fluido en esa superficie. Finalmente, para la altura vamos a tomar como referencia el punto más bajo del fluido, el punto C. Midiendo desde ese nivel, la superficie se encuentra 0,5 m por encima.

El otro punto a considerar es el punto C de salida del fluido. En ese punto el fluido tiene una velocidad desconocida, su nivel es cero (porque es el que se tomó como referencia), y su presión es la atmosférica, porque también se encuentra abierto a la atmósfera. Así tenemos:

$$\cancel{P_{atm}} + \overbrace{\frac{1}{2}.\delta.v_1{}^2}^{=0} + \delta.g.h_1 = \cancel{P_{atm}} + \frac{1}{2}.\delta.v_2{}^2 + \overbrace{\delta.g.h_2}^{=0}$$

$$\cancel{\delta}.g.(0,5\,m) = \frac{1}{2}.\cancel{\delta}.v_2^{\,2} \xrightarrow{\textit{despejo}} v_2 = \sqrt{2.g.(0,5m)} \approx 3,16\,{}^{m}\!/_{s}$$

Esta es la velocidad en C, es decir es la velocidad en la salida de la manguera de la nafta. Pero esa velocidad es la misma en toda la manguera. Eso se debe a las condiciones de la condición de continuidad: al tener una sección constante, y el caudal de fluido que pasa por cualquier sección de la manguera debe ser constante. Se deduce que:

$$Q = cte \;\rightarrow\; v_1.\cancel{S} = v_2.\cancel{S} \;\rightarrow\; v = cte$$

En todo punto dentro de la manguera la velocidad es igual a la v_2 despejada. Esto incluye por supuesto al punto más alto de la manguera.

b) El caudal volumétrico inicial de fluido en la manguera lo sacamos como:

$$Q_{vol} = v_2.S = 3,16\,{}^{m}\!/_{seg}\,.\pi.R^2 \xrightarrow{R={}^{D}\!/_{2}=0,5\,cm}$$

$$= 3,16\,{}^{m}\!/_{seg}\,.\pi.(5.10^{-3}\,m)^2 \approx 2,48.10^{-4}\;{}^{m^3}\!/_{seg} = 0,248\;{}^{dm^3}\!/_{seg}$$

Y el caudal másico lo obtengo multiplicando por la densidad. Para eso, aclaro que la expresión "densidad relativa" se refiere a la densidad respecto del agua. Así, la densidad de la nafta es "0,68 por la del agua", usando para ella las unidades que mejor nos caigan:

$$Q_{vol} = \delta.Q_{masa} = 0,68\;{}^{kg}\!/_{dm^3}\,.0,248\;{}^{dm^3}\!/_{seg} \approx 0,17\;{}^{kg}\!/_{seg}$$

c) Volvamos a usar el Teorema de Bernoulli para comparar el punto más alto dentro de la manguera con algún otro conocido (puede ser cualquiera de los dos usados en la parte (a), yo voy a usar el punto de salida C). En el punto más alto tenemos que decir que su nivel *h* es desconocido, su velocidad es la misma que en C (es la calculada en el punto inicial, aunque no tiene importancia su valor porque como aparece de ambos lados, se simplifica)

$$P_1 + \cancel{\tfrac{1}{2}.\delta.v_1{}^2} + \delta.g.\overbrace{h_1}^{?} = P_{atm} + \cancel{\tfrac{1}{2}.\delta.v_2{}^2} + \overbrace{\delta.g.h_2}^{=0}$$

Para hallar "h" tenemos que poner la condición de que la altura sea la mayor posible. Como sabemos, al subir dentro de un fluido la presión disminuye. La condición de mayor altura posible es equivalente entonces a la de menor presión posible. Y el valor mínimo es cero. Así que poniendo esta condición en la igualdad anterior:

$$\xrightarrow{h_{máx}} \overbrace{P_1}^{=0} + \delta.g.h = 1013 \text{ hPa} \rightarrow h = \frac{101300\ Pa}{680\ {}^{kg}\!/\!{}_{m^3}\ .\ 10\ {}^{m}\!/\!{}_{seg^2}} \approx 14{,}9\ m$$

Cuidado: esta altura se mide desde la referencia tomada en el extremo abierto de salida C, para obtener la que piden debo descontarle 0,5 m como muestra el dibujo del enunciado.

El Efecto Venturi

Fue descubierto por el físico italiano Giovani Venturi, y no es más que un caso particular de la famosa ecuación de Bernoulli. Venturi pudo demostrar que al variar la sección en un tubo, la presión del fluido disminuía al disminuir la sección. No es más que la combinación de dos resultados conocidos por nosotros, de la ecuación de continuidad:

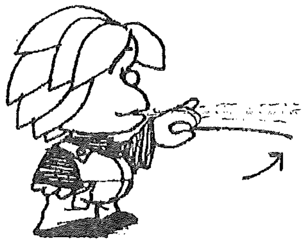
$$v_1.S_1 = v_2.S_2$$

Vemos que si disminuye la sección aumenta la velocidad. Con esto, en la ecuación de Bernoulli (caso horizontal h = cte):

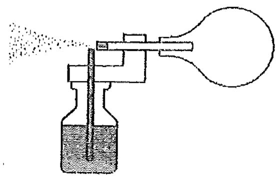
$$P_1 + \frac{1}{2}.\delta.v_1{}^2 + \cancel{\delta.g.h_1} = P_2 + \frac{1}{2}.\delta.v_2{}^2 + \cancel{\delta.g.h_2}$$

Vemos que cuando aumenta el término de velocidad, debe disminuir el de presión. Uniendo resultados, cuando la sección de un tubo se angosta (a ese sector se lo suele llamar "garganta") implica una menor presión, como lo enunció Venturi.

Este efecto explica por ejemplo que al soplar aire sobre una hoja en forma paralela a la misma, provoque que ésta tienda a subir quedando horizontal (ver figura). El aire a mayor velocidad en la parte superior de la hoja tiene menor presión que el aire quieto inferior, la resultante sobre la hoja va hacia arriba.



Muchos mecanismos utilizan este efecto. Entre ellos voy a mencionar los pulverizadores que hacen pasar un chorro por un angostamiento, al hacerlo disminuye la presión y esto provoca un ascenso de un líquido por un tubo que se mezcla con el chorro saliendo como una mezcla hacia el exterior.



7) Un tubo venturi se utiliza como eductor, instalado en forma horizontal, y para probar su capacidad de succión se hace una prueba con un manómetro de tubo en "U". Las áreas de la parte izquierda ancha y la parte de constricción se indican en la figura.

Fluye agua pura con un caudal másico de 6 kg/s. Se solicita hallar indicando la estrategia de cálculo:

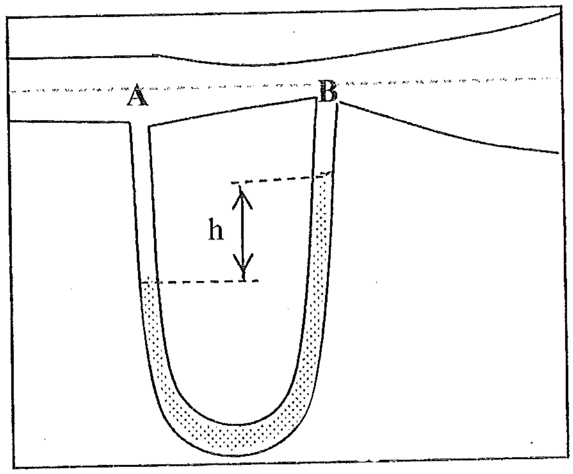
a) La rapidez del flujo en la parte ancha y en la constricción.

b) La diferencia de presión entre ambas secciones, indicando el resultado en [bar] y en [mca].

c) La diferencia de altura de las ramas del tubo "U", si se utiliza mercurio como líquido manométrico (densidad relativa del mercurio 13,6)

El tubo Venturi tiene un típico angostamiento donde como vimos en el cuadro anterior, se provoca una disminución de presión.

El enunciado nos cuenta que se lo ha construido para usarse como "eductor", que básicamente significa que se lo quiere usar para "chupar algo" de un depósito, tal como explicamos para el pulverizador. Pero eso no nos cambia en nada el problema.



Se le agregó abajo un tubo en "U", y como la presión en las dos secciones que comunica no es la misma, el nivel del líquido (mercurio) dentro del tubo no es el mismo.

Pero no me quiero adelantar, voy a contestar primero las preguntas más sencillas.

a) como tenemos el caudal que atraviesa cada parte del tubo, podemos calcular la velocidad en las secciones pedidas. Para eso debemos usar las secciones que se indican en el enunciado, y la densidad del líquido que fluye por el tubo, que es agua pura:

$$\delta = 1\,\frac{kg}{dm^3} \;\; ; \;\; S_A = 40\ cm^2 = 0{,}4\ dm^2 \;\; ; \;\; S_B = 10\ cm^2 = 0{,}1\ dm^2$$

Entonces, de la expresión del caudal másico:

$$Q_{mas} = \delta.v.S \xrightarrow{despejo} v = \frac{Q_{mas}}{\delta.S} = \begin{cases} v_A = \dfrac{6\,\frac{kg}{seg}}{1\,\frac{kg}{dm^3}.0{,}4\ dm^2} = 15\,\dfrac{dm}{seg} = 1{,}5\,\dfrac{m}{seg} \\ \\ v_B = \dfrac{6\,\frac{kg}{seg}}{1\,\frac{kg}{dm^3}.0{,}1\ dm^2} = 60\,\dfrac{dm}{seg} = 6\,\dfrac{m}{seg} \end{cases}$$

b) Planteamos la ecuación de Bernoulli, en el caso del tubo horizontal (h = 0), entre los puntos A y B.

$$P_A + \frac{1}{2}.\delta.{v_A}^2 = P_B + \frac{1}{2}.\delta.{v_B}^2$$

Usando las velocidades calculadas en la parte anterior, y la densidad del agua, obtenemos:

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}.\delta.{v_B}^2 - \frac{1}{2}.\delta.{v_A}^2 = \frac{1}{2}.1000\ \frac{kg}{m^3}.\left[\left(6\frac{m}{seg}\right)^2 - \left(1{,}5\frac{m}{seg}\right)^2\right] = 16875\ Pa$$

Hago notar que la resta da positiva, como era de esperar, porque restamos la presión en la parte ancha A menos la de la garganta B, y como vimos en el cuadro de la página 13, la segunda siempre es más chica.

Todavía tenemos que pasar esta diferencia a las unidades pedidas, lo hacemos usando las equivalencias: 1 bar = 10^5 Pa

$$100\ 000\ Pa \ \text{———}\ 1\ \text{bar}$$

$$16875\ \ Pa \ \text{———}\ \Delta P_{AB} = \frac{16875\ .1\ \text{bar}}{100\ 000} = 0{,}16875\ \text{bar}$$

Y que 1 mca = 9800 Pa

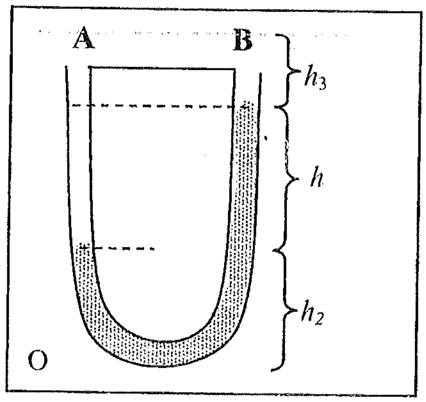
$$9800\ Pa \ \text{————}\ 1\ mca$$

$$16875\ Pa \ \text{————}\ \Delta P = \frac{16875\ .1}{9800} = 1{,}72\ mca$$

c) Ahora entramos en el detalle del tubo en U. El problema dice que se usa como manómetro, es decir como instrumento que mide una diferencia de presión. En este caso, mide la diferencia de presión entre A y B. Y lo hace de la siguiente manera.

El tubo en U como manómetro

Dentro del tubo en U, tenemos agua y mercurio en reposo. Así que se puede plantear hidrostática (o Bernoulli sin velocidad). Del lado izquierdo del tubo hay una columna de agua de altura $h + h_3$, y una de altura h_2 de mercurio, hasta llegar al nivel O en el fondo del tubo. Del derecho tenemos una columna de mercurio de altura $h + h_2$ más una de agua de altura h_3.



Como tenemos una situación de equilibrio, en el fondo del tubo la presión de ambas columnas debe ser igual. Así que por un lado tenemos que por la columna izquierda:

$$P_O = P_A + \delta_{H_2O}.g.(h + h_3) + \delta_{Hg}.g.h_2$$

Y por la derecha:

$$P_O = P_B + \delta_{H_2O}.g.h_3 + \delta_{Hg}.g.(h + h_2)$$

Como dijimos, debo igualar estas expresiones:

$$P_A + \delta_{H_2O}.g.(h + h_3) + \delta_{Hg}.g.h_2 = P_B + \delta_{H_2O}.g.h_3 + \delta_{Hg}.g.(h + h_2)$$

Distribuyo y simplifico:

$$P_A + \delta_{H_2O}.g.h = P_B + \delta_{Hg}.g.h$$

Y pasando de lado:

$$P_A - P_B = g.h.(\delta_{Hg} - \delta_{H_2O})$$

Es decir, la diferencia de altura "h" en el nivel del mercurio dentro del tubo en "U" nos permite sacar la diferencia de presión entre los puntos A y B. Así funciona el manómetro, uno mide la diferencia de altura (para lo cual el tubo en U es un vidrio graduado) y con esta cuenta tiene el ΔP. En este caso reemplazo en la expresión y despejo h:

$$\overbrace{P_A - P_B}^{16875\ Pa} = 9{,}8\frac{m}{s^2}.h.\left(13600\ \frac{kg}{m^3} - 1000\ \frac{kg}{m^3}\right) \xrightarrow{despejo}$$

$$h = 0{,}1367\ m = 13{,}67\ cm$$

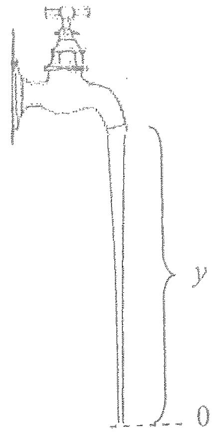
8) Un líquido que fluye de un tubo vertical produce un chorro de sección circular y de forma bien definida. Para obtener la ecuación del contorno de esta forma, suponga que el líquido está en caída libre una vez que sale del tubo. En la boca del tubo, el líquido tiene rapidez "V_0", y el radio del chorro es "r_0".

a) Obtenga una ecuación para la rapidez del líquido en función de la distancia "y" que ha caído. Combinando este resultado con la ecuación de continuidad, obtenga una expresión para el radio del chorro en función de "y". (Suponga que no se llega a tener energía suficiente como para formar gota debido a razones de tensión superficial)

b) (Parte numérica) Si fluye agua a $V_0 = 1{,}2$ m/s. ¿A qué distancia "y", el radio del chorro se habrá reducido a la mitad del radio original de salida?

a) suponiendo que el fluido está en caída libre, podemos escribir la velocidad en función de la altura mediante las ecuaciones de la cinemática, o bien por conservación de la energía. Yo voy a usar este camino porque no depende del tiempo, para no estar haciendo despejes y sustituciones. Planteo el punto de salida, y otro punto a distancia "y" más abajo, que tomo como altura de referencia de nivel cero.

Por lo tanto en la salida hay energía cinética y potencial, y al llegar al punto "y" sólo hay cinética:



$$\frac{1}{2}.\cancel{m}.v_f^{\,2} = \frac{1}{2}.\cancel{m}.v_o^{\,2} + \cancel{m}.g.y \;\rightarrow\; v_f = \sqrt{v_o^{\,2} + 2.g.y} \quad (\heartsuit)$$

Aclaro una cosa: también vale plantear la ecuación de Bernoulli para el chorro de agua que cae, considerando los mismos dos puntos. Da lo mismo, sólo hay que decir que esos puntos están en contacto con la atmósfera, por lo que en ambos la presión es la atmosférica (y se la simplifica)

Por otro lado, de la ecuación de continuidad, tengo:

$$Q_o = Q_f \;\rightarrow\; v_o.S_o = v_f.S_f$$

Suponiendo entonces que el chorro es cilíndrico, con un radio variable, podemos cambiar la sección usando la expresión de la fórmula del área del círculo.

$$\xrightarrow{S=\pi.r^2} \quad v_o.\cancel{\pi}.r_o^{\,2} = v_f.\cancel{\pi}.r_f^{\,2} \;\rightarrow\; r_f = \sqrt{\frac{v_o}{v_f}}\,.\,r_o$$

Usando ($\heartsuit$) para eliminar v_f:

$$r_f = \sqrt{\frac{v_o}{\sqrt{v_o^{\,2} + 2.g.y}}}\,.\,r_o = \sqrt[4]{\frac{v_o^{\,2}}{v_o^{\,2} + 2.g.y}}\,.\,r_o$$

Esta es la expresión pedida.

b) en la expresión anterior usamos los datos en el sistema MKS para encontrar "y":

$$\xrightarrow{r_f=\frac{1}{2}.r_o} \frac{1}{2}.r_o = \sqrt[4]{\frac{(1,2)^2}{(1,2)^2+20.y}}\,.\,r_o \rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt[4]{\frac{(1,2)^2}{(1,2)^2+20.y}} \rightarrow$$

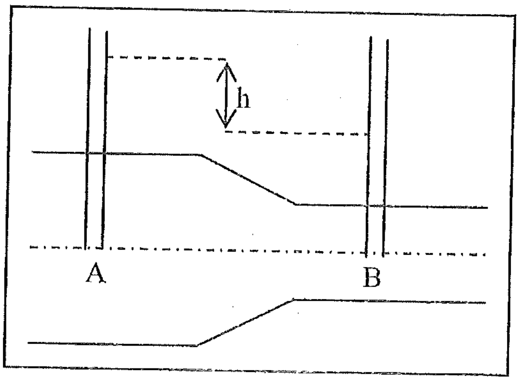
$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1,44}{1,44+20.y} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1,44}{1,44+20.y} \rightarrow$$

$$1,44+20.y = 23,04 \rightarrow y = \frac{23,04-1,44}{20} = 1,08\,m$$

Esta es la distancia que debe caer el chorro para disminuir el radio a la mitad.

Problema Adicional:

Un fluido ideal de densidad δ circula hacia la derecha por un tubo horizontal de sección variable. La sección en A es de 2 dm^2 y la sección en B es de 1 dm^2. Se colocan dos piezómetros (tubos verticales) para medir diferencias de presión, la diferencia de altura entre los mismos es de 10 cm. Calcular la velocidad en A y en B



Primero planteo la ecuación de continuidad. Como no existen ni fuentes ni sumideros de fluido, y éste es incompresible, se tiene que:

$$Q = cte \rightarrow v_A.S_A = v_B.S_B \xrightarrow{datos} v_A.2\ dm^2 = v_B.1\ dm^2 \rightarrow v_B = 2.v_A \quad (\clubsuit)$$

Por otro lado, tenemos que dentro de cada tubo vertical, el fluido se encuentra en reposo. Por el Teorema fundamental de la Hidrostática, podemos calcular la presión en el punto inferior del tubo, en función de la columna de líquido:

$$P_A = P_{atm} + \delta.g.h_A$$

$$P_B = P_{atm} + \delta.g.h_B$$

Resto m. a m. $$P_A - P_B = \delta.g.\overbrace{(h_A - h_B)}^{h=0,1\,m} \quad (\heartsuit)$$

Para terminar, uso el Teorema de Bernoulli entre los puntos A y B, que están sobre la línea de corriente:

$$P_A + \tfrac{1}{2}.\delta.v_A{}^2 + \cancel{\delta.g.h_A} = P_B + \tfrac{1}{2}.\delta.v_B{}^2 + \cancel{\delta.g.h_B}$$

Donde simplifiqué el término de la altura, porque es el mismo para ambos puntos. Pasando de lado:

$$\overbrace{P_A - P_B}^{(\heartsuit)} + \tfrac{1}{2}.\delta.v_A{}^2 = \tfrac{1}{2}.\delta.v_B{}^2 \quad \rightarrow \quad \delta.g.0,1\ m + \tfrac{1}{2}.\delta.v_A{}^2 = \tfrac{1}{2}.\delta.v_B{}^2$$

Observar que del lado izquierdo puedo sacar como factor común la densidad del fluido, y de esa manera simplificarla. Uso la relación ($\clubsuit$) entre velocidades para sustituir una de ellas:

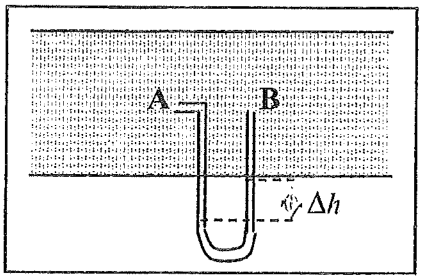
$$g.0,1\ m + \tfrac{1}{2}.v_A{}^2 = \tfrac{1}{2}.(2.v_A)^2 \xrightarrow{g=10\ m/s^2} 1\ m^2/s^2 + \tfrac{1}{2}.v_A{}^2 = 2.v_A{}^2$$

$$1\ m^2/s^2 = \tfrac{3}{2}.v_A{}^2 \xrightarrow{despejo} v_A = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\ \tfrac{m}{seg} \approx 0,816\ \tfrac{m}{seg}$$

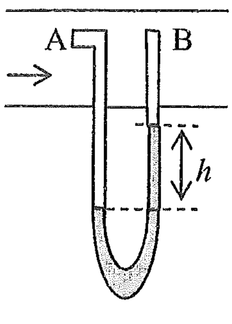
Y en (♣): $v_B = 2.v_A \approx 1{,}63 \frac{m}{seg}$

El Tubo de Pitot

Una variante del manómetro en U explicado en la página 16 se tiene cuando uno de los brazos del tubo enfrenta a las líneas de corriente. El tubo de Pitot es un aparato que se utiliza para medir la velocidad de una corriente fluida. Consiste en una sonda, diseñada con un perfil apropiado para evitar perturbaciones significativas en el régimen de flujo, que posee una abertura (A) en su extremo, enfrentada directamente a las líneas de corriente, y otras aberturas (B) laterales, colocadas lo suficientemente hacia atrás para que en ellas la velocidad y la presión correspondan a los valores de corriente libre. La abertura A constituye una toma de presión total (llamada "punto de estancamiento"); las oberturas B son las llamadas "tomas de presión estática".



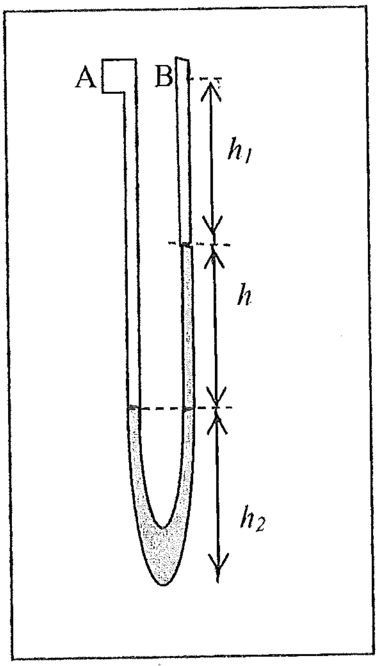
En el ejemplo que sigue a continuación vamos a demostrar que la diferencia de nivel en el líquido manométrico dentro de la U permite calcular la velocidad del fluido dentro del tubo.



Un tubo de Pitot está instalado en una tubería cilíndrica de 2 cm de radio por la cual circula agua de densidad δ = 1000 kg/m^3. El líquido dentro del manómetro tiene densidad relativa 8,5. La diferencia de altura en sus columnas es 2 cm. Hallar el caudal que circula por la cañería

Primero consideremos la entraba B, que como dijimos, se llama toma de presión estática. El fluido dentro de esa columna se encuentra en condiciones estáticas, por lo que podemos aplicar el Teorema de la Hidrostática, hasta el punto del fondo del tubo en U:

$$P_{fondo} = P_B + \delta_{H_2O}.g.h_1 + \delta_{man}.g.(h + h_2)$$



Por el lado derecho en cambio. Tenemos la toma "dinámica", el líquido que enfrenta al tubo en ese punto tiene velocidad, por lo que vamos a aplicar Bernoulli:

$$P_C = P_A + \delta_{H_2O}.g.(h + h_1) + \tfrac{1}{2}.\delta_{H_2O}.v_A{}^2$$

Y de ahí en adelante el problema es estático

$$P_{fondo} = P_C + \delta_{man}.g.h_2 \xrightarrow{reemplazo}$$

$$= P_A + \delta_{H_2O}.g.(h + h_1) + \tfrac{1}{2}.\delta_{H_2O}.v_A{}^2 + \delta_{man}.g.h_2$$

Como tenemos una situación de equilibrio dentro del tubo, la presión de ambos lados debe ser la misma. Igualo el resultado obtenido por ambos lados:

$$P_A + \delta_{H_2O}.g.(h + h_1) + \tfrac{1}{2}.\delta_{H_2O}.v_A{}^2 + \delta_{man}.g.h_2 = P_B + \delta_{H_2O}.g.h_1 + \delta_{man}.g.(h + h_2)$$

En esta igualdad tenemos varias cosas para simplificar. En principio, la presión en A y B es la misma, porque es la presión del líquido prácticamente en el mismo punto (así se diseña el tubo, cambia la orientación, pero están sobre la misma línea de flujo). Si se distribuye en los paréntesis aparecen varios términos repetidos que se cancelan. Queda:

$$\delta_{H_2O}.g.h + \tfrac{1}{2}.\delta_{H_2O}.v_A^{\ 2} = \delta_{man}.g.h \rightarrow \tfrac{1}{2}.\delta_{H_2O}.v_A^{\ 2} = g.h.\left(\delta_{man} - \delta_{H_2O}\right)$$

Esta expresión muestra que el Tubo de Pitot permite determinar la velocidad de un fluido midiendo el desnivel en la columna del líquido que hay en el manómetro. Reemplazo los datos y despejo *v*:

$$500\,\frac{kg}{m^3}.v_A^{\ 2} = 0{,}2\frac{m^2}{s^2}.\left(7500\frac{kg}{m^3}\right) \rightarrow v_A = \sqrt{3}\,\frac{m}{seg} \approx 1{,}73\,\frac{m}{seg}$$

Y para terminar, el caudal volumétrico lo obtengo multiplicando esta velocidad por la sección de la tubería:

$$Q = v.S = v.\pi.r^2 = 1{,}73\,\frac{m}{seg}.\pi.(0{,}02\,m)^2 \approx 2{,}2.10^{-3}\,\frac{m^3}{seg} = 2{,}2\,\frac{l}{seg}$$